
Logika

Logika — rachunek zdań

Materiały pomocnicze do wykładu dla Studentów

Informatyki Stosowanej

Wydział EAIiB AGH

Antoni Ligęza

Materiały pomocnicze:

<http://home.agh.edu.pl/~ligeza>

Przedmiot logiki

Przedmiotem logiki matematycznej są następujące zagadnienia:

- formalna, symboliczna reprezentacja wiedzy; wiedza wyrażana pierwotnie w języku naturalnym jest zapisywana w postaci *formuł logicznych*,
- transformacja wiedzy do równoważnych postaci normalnych (CNF, DNF, NNF),
- minimalizacja reprezentacji,
- przetwarzanie wiedzy za pomocą reguł stanowiących schematy wnioskowania; w tym celu formułowane są *reguły wnioskowania*,
- badanie własności generowanych wniosków i systemów logicznych; własności te obejmują m. in. *poprawność* i *zupełność*,
- analiza systemów opisywanych za pomocą logiki (baz wiedzy),
- synteza systemów definiowanych za pomocą logiki.

Klasyczna logika formalna bada mechanizmy **rozumowań niezawodnych**, w których otrzymywane wnioski są zawsze prawdziwe, o ile wychodzi się z prawdziwych przesłanek, a więc **wnioskowania dedukcyjnego**.

Czasem dopuszcza się również inne schematy wnioskowania, prowadzące do użytecznych, chociaż nie zawsze prawdziwych wniosków (np. **abdukcja** oraz **indukcja**).

Alfabet rachunku zdań

Alfabet rachunku zdań tworzą symbole formuł zdaniowych, łączących je spójników (funkcji) logicznych oraz stosowane dla uporządkowania notacji nawiasy.

Formuły zdaniowe symbolizują konkretne zdania; zdania te mogą być dobrze określone i wówczas można im przypisać ocenę *prawdy* albo *fałszu* lub też symbolizować pewne nieskonkretyzowane w danej chwili wypowiedzi.

W pierwszym przypadku, takie skończone wypowiedzi, którym można jednoznacznie przypisać ocenę *prawdy* albo *fałszu*, nazywane będą *zdaniami*. Mogą one być zapisywane jawnie, np. “Śnieg jest biały”, “W nocy jest ciemno”, “Pada deszcz”, itp. lub też przy użyciu pewnych symboli, np. p czy q .

W drugim przypadku, formuła zdaniowa symbolizuje pewną bliżej nie sprecyzowaną wypowiedź, jednakże taką, której wartość logiczna może przyjąć wartość *prawdy* albo *fałszu*. W takim przypadku formuła zdaniowa nazywana jest *zmienną zdaniową*.

W przypadku zmiennych zdaniowych prowadzone rozumowanie nie jest powiązane z ich znaczeniem. Ważna jest tylko *interpretacja logiczna*, a więc przypisanie wartości *prawdy* albo *fałszu*.

Aby zmiennej zdaniowej przypisać konkretne znaczenie stosowana jest notacja:

$$p \stackrel{\text{def}}{=} \text{'Jest zimno'}$$

Alfabet rachunku zdań

Definicja 1 *Alfabet rachunku zdań:*

- P — zbiór symboli propozycjonalnych (zmiennych logicznych),

$$P = \{p, q, r, \dots, p_1, q_1, r_1, \dots, p_2, q_2, r_2, \dots\},$$

- \neg — negacja,
- \wedge — koniunkcja,
- \vee — alternatywa,
- \Rightarrow — implikacja (może być również postaci \Leftarrow),
- \Leftrightarrow — równoważność (implikacja dwustronna),
- dwa symbole specjalne: \top (formuła zawsze prawdziwa) oraz \perp (formuła zawsze fałszywa),
- nawiasy.

Istnieją różne **warianty notacji** spójników logicznych!

Przy wykorzystaniu powyższych spójników logicznych i symboli formuł zdaniowych (formuł atomowych) buduje się bardziej złożone formuły logiczne rachunku zdań. Nie wszystkie jednak możliwe do utworzenia napisy będą formułami. Poniżej podano definicję poprawnie skonstruowanych formuł.

Składnia rachunku zdań

Definicja 2 Składnia — definicja formuł:

- symbole formuł specjalnych \top i \perp są formułami,
- każde $p \in P$ jest formułą (atomiczną),
- jeżeli ϕ, ψ są formułami, to:
 - $\neg(\phi)$ jest formułą (także $\neg(\psi)$),
 - $(\phi \wedge \psi)$ jest formułą,
 - $(\phi \vee \psi)$ jest formułą,
 - $(\phi \Rightarrow \psi)$ jest formułą,
 - $(\phi \Leftrightarrow \psi)$ jest formułą,
 - nic innego nie jest formułą.

Zbiór formuł określany jest symbolem FOR.

Każda poprawnie skonstruowana formuła posiada jednoznacznie określone drzewo struktury.

Formuły należące do zbioru $P \cup \{\top, \perp\}$ nazywane są formułami atomicznymi (atomami).

Hierarchia spójników — eliminacja nawiasów

Zakłada się następującą hierarchię spójników (priorytety; od najwyższego do najniższego):

- negacja (\neg),
- koniunkcja (\wedge),
- dysjunkcja (\vee),
- implikacja (\Rightarrow),
- równoważność (\Leftrightarrow).

Przyjęcie priorytetów pozwala eliminować nawiasy — z zachowaniem jednoznaczności interpretacji.

Semantyka rachunku zdań

Formułom atomicznym i złożonym przypisywana jest ocena prawdy lub fałszu. Aktualna ocena formuły zależy od przypisania wartości logicznych występującym w niej formułom atomowym oraz od konstrukcji samej formuły. Poniżej wprowadzono ważne pojęcie *interpretacji* formuł atomowych w rachunku zdań.

Definicja 3 Niech P będzie zbiorem rozważanych symboli formuł atomowych a \mathcal{T} wyróżnionym zbiorem wartości logicznych, tj. $\mathcal{T} = \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$. Interpretacja symboli zbioru P nazywa się każdą funkcją postaci:

$$I: P \longrightarrow \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}. \quad (1)$$

przyporządkowującą każdemu symbolowi formuły atomowej wartość logiczną prawdy albo fałszu.

Interpretacja określa zatem czy dana formuła atomowa jest uznawana za prawdziwą czy też fałszywą. Przy danej interpretacji formuła może być prawdziwa lub fałszywa; w przypadku gdy interpretacja nie przypisywałaby jednoznacznie wartości logicznej prawdy albo fałszu wszystkim symbolom rozważanego zbioru, interpretację taką określa się jako niepełną lub częściową.

Pojęcie interpretacji **rozszerzamy** na zbiór formuł (jak???)

Notacja: $I(\phi) = \mathbf{T}$ zapisujemy $\models_I \phi$; $I(\phi) = \mathbf{F}$ zapisujemy $\not\models_I \phi$

Dla każdej formuły logicznej można zbudować **tablicę prawdy**.

Interpretacja — c.d.

Definicja 4 Niech P oznacza zbiór rozważanych symboli formuł atomowych, $\mathcal{T} = \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ – dwuelementowy zbiór wartości logicznych, a I – dowolną interpretację. Interpretacja I przypisuje wartości logiczne wszystkim formułom ϕ, ψ, φ ze zbioru **FOR**, tzn.:

- $I(\top) = \mathbf{T}$ ($\models_I \top$),
- $I(\perp) = \mathbf{F}$ ($\not\models_I \perp$),
- $\models_I \neg\phi$ wtw. $\not\models_I \phi$,
- $\models_I \psi \wedge \varphi$ wtw. $\models_I \psi$ oraz $\models_I \varphi$,
- $\models_I \psi \vee \varphi$ wtw. $\models_I \psi$ lub $\models_I \varphi$,
- $\models_I \psi \Rightarrow \varphi$ wtw. $\models_I \varphi$ lub $\not\models_I \psi$,
- $\models_I \psi \Leftrightarrow \varphi$ wtw. $\models_I (\psi \Rightarrow \varphi)$ oraz $\models_I (\varphi \Rightarrow \psi)$.

Rozszerzenie pojęcia interpretacji na zbiór formuł pozwala określić wartość logiczną dowolnej poprawnie skonstruowanej formuły rachunku zdań.

Definicja 5 **Równoważność formuł** Formuły ϕ oraz ψ nazywamy *logicznie równoważnymi* wtw. gdy dla każdej interpretacji I zachodzi

$$\models_I \phi \quad \text{wtw.} \quad \models_I \psi. \quad (2)$$

Definicja 6 **Logiczna konsekwencja** Formuły ψ jest *logiczną konsekwencją* formuły ϕ wtw. gdy dla każdej interpretacji I zachodzi

$$\text{jeżeli} \quad \models_I \phi \quad \text{to} \quad \models_I \psi. \quad (3)$$

Tabele prawdy

ϕ	$\neg\phi$
F	T
T	F

ϕ	φ	$\phi \wedge \varphi$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

ϕ	φ	$\phi \vee \varphi$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

ϕ	φ	$\phi \Rightarrow \varphi$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

ϕ	φ	$\phi \Leftrightarrow \varphi$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Tabele zerojedynkowe prawdy

Zamiast symboli prawdy i fałszu często stosujemy zapis uproszczony: 1 zamiast prawdy i 0 zamiast fałszu. Tablica prawdy dla negacji przybiera postać:

p	$\neg p$
0	1
1	0

Tablica prawdy dla koniunkcji przybiera postać:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Tablica prawdy dla dysjunkcji przybiera postać:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Tablica prawdy dla implikacji przybiera postać:

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Definicje symboli spójników logicznych

Często podana powyżej definicja przedstawiana jest w formie jest tabeli ilustrującej podane zależności logiczne (patrz poniżej).

ϕ	ψ	$\neg\phi$	$\phi \wedge \psi$	$\phi \vee \psi$	$\phi \Rightarrow \psi$	$\phi \Leftrightarrow \psi$
<i>true</i>	<i>true</i>	<i>false</i>	<i>true</i>	<i>true</i>	<i>true</i>	<i>true</i>
<i>true</i>	<i>false</i>	<i>false</i>	<i>false</i>	<i>true</i>	<i>false</i>	<i>false</i>
<i>false</i>	<i>true</i>	<i>true</i>	<i>false</i>	<i>true</i>	<i>true</i>	<i>false</i>
<i>false</i>	<i>false</i>	<i>true</i>	<i>false</i>	<i>false</i>	<i>true</i>	<i>true</i>

Semantykę wybranych funkcji można definiować za pomocą sprowadzenia jej do równoważnej formuły zawierającej symbole koniunkcji, dysjunkcji i negacji.

- $\phi \Rightarrow \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$,
- $\phi \Leftrightarrow \psi \equiv (\phi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \phi)$,
- $\phi | \psi \equiv \neg(\phi \wedge \psi)$ – funkcja (kreska) Sheffera, jest to tzw. funkcja NAND; inna notacja $\overline{\phi \wedge \psi}$,
- $\phi \downarrow \psi \equiv \neg(\phi \vee \psi)$ – funkcja (strzałka) Pierce’a, jest to tzw. funkcja NOR; inna notacja $\overline{\phi \vee \psi}$,
- $\phi \oplus \psi \equiv (\neg\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \neg\psi)$ – funkcja alternatywy wykluczającej, jest to tzw. funkcja EX-OR,
- $\neg\phi \wedge \psi$ oraz $\phi \wedge \neg\psi$ – funkcje zakazu lub różnice niesymetryczne (negacja implikacji).

Ogólnie dla n argumentów wejściowych można skonstruować 2^{2^n} różnych funkcji, a więc dla $n = 2$ jest 16 różnych funkcji (dlaczego? jakich?).

Systemy funkcyjne funkcjonalnie pełne

Definicja 7 System funkcyjny (zestaw funkcji/spójników logicznych) jest *funkcjonalnie pełny*, wtw. gdy przy pomocy tych spójników można zdefiniować wszystkie inne spójniki logiczne.

Przykłady systemów funkcyjnych funkcjonalnie pełnych:

AND, OR, NOT:

$$\{\neg, \wedge, \vee\}$$

AND, NOT:

$$\{\neg, \wedge\}$$

OR, NOT:

$$\{\neg, \vee\}$$

IMPLIKACJA, NOT:

$$\{\neg, \Rightarrow\}$$

NAND:

$$\{\downarrow\}$$

NOR:

$$\{\updownarrow\}$$

Definicja 8 System funkcyjny funkcjonalnie pełny jest *minimalny* wtw. gdy nie można z niego usunąć żadnego spójnika bez utraty pełności funkcjonalnej. W przeciwnym przypadku jest to system *nadmiarowy* (redundantny).

Dla wygody wykorzystuje się systemy nadmiarowe.

Ważniejsze prawa (równoważności) logiczne

- $\neg\neg\phi \equiv \phi$ — prawo (eliminacji) podwójnej negacji,
- $\phi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \phi$ — przemienność koniunkcji,
- $\phi \vee \psi \equiv \psi \vee \phi$ — przemienność dysjunkcji,
- $(\phi \wedge \varphi) \wedge \psi \equiv \phi \wedge (\varphi \wedge \psi)$ — łączność koniunkcji,
- $(\phi \vee \varphi) \vee \psi \equiv \phi \vee (\varphi \vee \psi)$ — łączność dysjunkcji,
- $(\phi \vee \varphi) \wedge \psi \equiv (\phi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \psi)$ — rozdzielność koniunkcji względem dysjunkcji,
- $(\phi \wedge \varphi) \vee \psi \equiv (\phi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \psi)$ — rozdzielność dysjunkcji względem koniunkcji,
- $\phi \wedge \phi \equiv \phi$ — idempotencja koniunkcji (pochłanianie),
- $\phi \vee \phi \equiv \phi$ — idempotencja dysjunkcji (pochłanianie),
- $\phi \wedge \perp \equiv \perp, \phi \wedge \top \equiv \phi$ — prawo identyczności,
- $\phi \vee \perp \equiv \phi, \phi \vee \top \equiv \top$ — prawo identyczności,
- $\phi \vee \neg\phi \equiv \top$ — prawo wyłączzonego środka,
- $\phi \wedge \neg\phi \equiv \perp$ — prawo sprzeczności,
- $\neg(\phi \wedge \psi) \equiv \neg(\phi) \vee \neg(\psi)$ — prawo De Morgana,
- $\neg(\phi \vee \psi) \equiv \neg(\phi) \wedge \neg(\psi)$ — prawo De Morgana,
- $\phi \Rightarrow \psi \equiv \neg\psi \Rightarrow \neg\phi$ — prawo kontrapozycji,
- $\phi \Rightarrow \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$ — zasada eliminacji implikacji.

Związki pomiędzy zdaniami logicznymi

Zdanie proste

$$p \Rightarrow q$$

Zdanie odwrotne

$$q \Rightarrow p$$

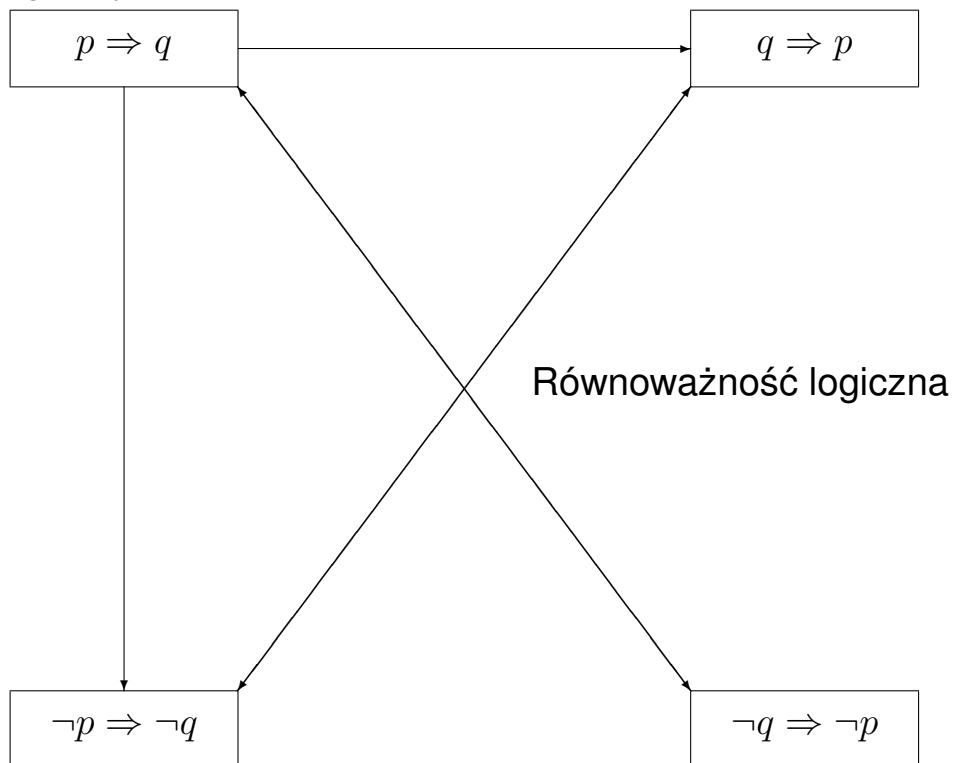
Zdanie przeciwne

$$\neg p \Rightarrow \neg q$$

Zdanie przeciwstawne

$$\neg q \Rightarrow \neg p$$

Kwadrat logiczny:



Wybrane problemy.

Symbole rachunku zdań a symbole metajęzyka.

Problem implikacji.

Symbole języka a symbole metajęzyka

Implikacja \Rightarrow to **spójnik logiczny**. Jest funktorem tworzącym formułę. Jest elementem języka.

Symbol logicznej implikacji \models jest **symbolem relacji logicznej konsekwencji**. Jest symbolem metajęzyka.

Podobnie \Leftrightarrow oraz \equiv .

Implikacja

$$\phi \Rightarrow \psi$$

jest prawdziwa o ile nie zachodzi $\models_I \phi$ oraz $\not\models_I \psi$ (z prawdy nie może wynikać fałsz).

Ta implikacja pozostaje prawdziwa zawsze, o ile $\not\models_I \phi$ (z fałszu wynika wszystko).

Z prawdziwości ψ (następnika) nie można wnioskować (to **częsty błąd**) o prawdziwości ϕ (poprzednika)!

Z fałszywości ψ (następnika) można wnioskować o nieprawdziwości ϕ (poprzednika).

Przykład: sprawdzanie tautologii

$$\phi = ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \Rightarrow r).$$

Mamy (2^3) możliwych interpretacji.

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$	$(p \vee q) \Rightarrow r$	Φ
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Inna możliwość — przekształcenia równoważne:

$$\phi \equiv ((\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)) \Leftrightarrow (\neg(p \vee q) \vee r).$$

$$\phi \equiv ((\neg p \wedge \neg q) \vee r) \Leftrightarrow (\neg(p \vee q) \vee r).$$

$$\phi \equiv (\neg(p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (\neg(p \vee q) \vee r).$$

Kładąc: $\psi = (\neg(p \vee q) \vee r)$ widzimy, że analizowana formuła jest postaci:

$$\phi \equiv \psi \Leftrightarrow \psi,$$

Przykład: badanie logicznej konsekwencji

$$\frac{(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)}{(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)}$$

Kładąc:

$$\phi = (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$$

oraz

$$\varphi = (p \vee r) \Rightarrow (q \vee s),$$

należy sprawdzić czy:

$$\phi \models \varphi. \tag{4}$$

p	q	r	s	$p \Rightarrow q$	$r \Rightarrow s$	$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$	$p \vee r$	$q \vee s$	$(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)$
0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Z analizy kolumn 7 i 10 wynika, że zachodzi [relacja logicznej konsekwencji](#) (brak logicznej równoważności — 7, 10, 12 i 15).

Proste koniunkcje literałów: mintermy

Definicja 9 *Literał* to dowolna formuła atomiczna p lub jej negacja $\neg p$.

Definicja 10 Niech q_1, q_2, \dots, q_n będą literałami. Każda formuła postaci:

$$\phi = q_1 \wedge q_2 \wedge \dots \wedge q_n$$

nazywana jest *mintermem*, *prostą koniunkcją* (prostą formułą) lub po prostu *iloczynem prostym* (iloczynem literałów).

Lemat 1 *Minterm jest formułą spełnialną wtw. gdy nie zawiera pary literałów komplementarnych.*

Lemat 2 *Minterm jest formułą niespełnialną wtw. gdy zawiera parę literałów komplementarnych.*

Oznaczenie: jeżeli

$$\phi = q_1 \wedge q_2 \wedge \dots \wedge q_n$$

to

$$[\phi] = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$$

Definicja 11 *Minterm ϕ subsumuje minterm ψ (jest bardziej ogólny) wtw. $[\phi] \subseteq [\psi]$.*

Lemat 3 *Niech ϕ oraz ψ będą dowolnymi mitermami. Zachodzi:*

$$\psi \models \phi \quad \text{iff} \quad [\phi] \subseteq [\psi].$$

Proste dysjunkcje literałów: maxtermy

Definicja 12 Niech q_1, q_2, \dots, q_n będą literałami. Każda formuła postaci:

$$\phi = q_1 \vee q_2 \vee \dots \vee q_n$$

nazywana jest *maxtermem*, *prostą dysjunkcją* lub *zdaniem* (ang. *clause*).

Lemat 4 Maxterm jest formułą falsyfikowalną wtw. gdy nie zawiera pary literałów komplementarnych.

Lemat 5 Maxterm jest tautologią wtw. gdy zawiera parę literałów komplementarnych.

Definicja 13 Maxterm/zdanie ψ *subsumuje* maxterm/zdanie ϕ (jest bardziej specyficzny) wtw.

$$[\psi] \subseteq [\phi]$$

Lemat 6 Niech ϕ oraz ψ będą dowolnymi maxtermami/zdaniami. Zachodzi:

$$\psi \models \phi \quad \text{iff} \quad [\psi] \subseteq [\phi].$$

Rozważmy zdanie:

$$\psi = \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \dots \vee \neg p_k \vee h_1 \vee h_2 \vee \dots \vee h_m$$

Po zastosowaniu prawa de Morgana dostajemy

$$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_k) \vee (h_1 \vee h_2 \vee \dots \vee h_m)$$

co można przedstawić jako:

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_k \Rightarrow h_1 \vee h_2 \vee \dots \vee h_m$$

Definicja 14 *Zdanie postaci:*

$$\psi = \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \dots \vee \neg p_k \vee h$$

nazywamy *klauzulą Horna*.

Alternatywna postać klauzuli Horna to:

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_k \Rightarrow h.$$

W PROLOGU oraz w DATALOGU:

$$h : -p_1, p_2, \dots, p_k.$$

a także:

$$h :- p_1, p_2, \dots, p_k.$$

$$h \text{ if } p_1 \text{ and } p_2 \text{ and } \dots \text{ and } p_k.$$

CNF — Conjunctive Normal Form

Definicja 15 *Formuła Ψ jest w postaci normalnej koniunktywnej (CNF) wtw. gdy*

$$\Psi = \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \dots \wedge \psi_n$$

gdzie $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ są zdaniem. Notacja: $[\Psi] = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$.

Definicja 16 *Implicent formuły — zdanie, które jeżeli przyjmuje wartość fałszu to ta formuła też przyjmuje wartość fałszu.*

Definicja 17 *Niech Ψ będzie formułą rachunku zdań, a P_Ψ niech oznacza wszystkie symbole formuł atomicznych występujące w Ψ . Zdaniem pełnym (maksymalnym) nazywamy zdanie ψ będące członem $CNF(\Psi)$ zawierające wszystkie symbole P_Ψ . Pełną/maksymalną postacią CNF formuły P_Ψ nazywamy formułę*

$$maxCNF(\Psi) = \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \dots \wedge \psi_n$$

gdzie wszystkie zdania $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ są maksymalne.

Definicja 18 *Formuła*

$$\Psi = \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \dots \wedge \psi_n$$

będąca w CNF jest minimalna wtw. gdy nie ma możliwości redukcji do postaci równoważnej o mniejszej liczbie zdań składowych.

Postać CNF dobrze nadaje się do badania niespełnialności; wystarczy wskazać niespełnialny podzbiór zdań zbioru $[\Psi]$.

Formuła zawsze fałszywa \perp zawierająca n zmiennych zdaniowych może zostać przedstawiona w postaci CNF w jednoznaczny sposób i składa się ona z 2^n różnych dysjunkcji, każda o n składowych, np.:

$$\perp = pqr \wedge pq\bar{r} \wedge p\bar{q}r \wedge p\bar{q}\bar{r} \wedge \bar{p}qr \wedge \bar{p}q\bar{r} \wedge \bar{p}\bar{q}r \wedge \bar{p}\bar{q}\bar{r} \quad (\text{CNF})$$

DNF — Disjunctive Normal Form

Definicja 19 *Formuła Φ jest w postaci normalnej dysjunkttywnej (DNF) wtw. gdy*

$$\Phi = \phi_1 \vee \phi_2 \vee \dots \vee \phi_n$$

gdzie $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ są mintermami. Notacja: $[\Phi] = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$.

Definicja 20 *Implikant formuły — iloczyn prosty, które jeżeli przyjmuje wartość prawdy to ta formuła też przyjmuje wartość prawdy.*

Definicja 21 *Niech Φ będzie formułą rachunku zdań, a P_Φ niech oznacza wszystkie symbole formuł atomicznych występujące w Φ . Iloczynem pełnym (maksymalnym) nazywamy zdanie ϕ będące członem $DNF(\Phi)$ zawierające wszystkie symbole P_Φ . Pełną/maksymalną postacią DNF formuły P_Φ nazywamy formułę*

$$maxDNF(\Phi) = \phi_1 \vee \phi_2 \vee \dots \vee \phi_n$$

gdzie wszystkie iloczyny $\phi_1 \vee \phi_2 \vee \dots \vee \phi_n$ są maksymalne.

Definicja 22 *Formuła*

$$\Phi = \phi_1 \vee \phi_2 \vee \dots \vee \phi_n$$

będąca w DNF jest minimalna wtw. gdy nie ma możliwości redukcji do postaci równoważnej o mniejszej liczbie iloczynów składowych.

Postać DNF dobrze nadaje się do badania spełnialności; wystarczy wskazać spełnialny podzbiór iloczynów zbioru $[\Phi]$.

Formuła zawsze prawdziwa \top zawierająca n zmiennych zdaniowych może zostać przedstawiona w postaci DNF w jednoznaczny sposób i składa się ona z 2^n różnych iloczynów, każdy o n składowych, np.:

$$\top = pqr \vee pq\bar{r} \vee p\bar{q}r \vee p\bar{q}\bar{r} \vee \bar{p}qr \vee \bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}\bar{q}\bar{r} \quad (\text{DNF})$$

Sprowadzanie do CNF/DNF

1. $\Phi \Leftrightarrow \Psi \equiv (\Phi \Rightarrow \Psi) \wedge (\Psi \Rightarrow \Phi)$ – eliminacja symboli równoważności,
2. $\Phi \Rightarrow \Psi \equiv \neg\Phi \vee \Psi$ – eliminacja symboli implikacji,
3. $\neg(\neg\Phi) \equiv \Phi$ – eliminacja zagnieżdżonych negacji,
4. $\neg(\Phi \vee \Psi) \equiv \neg\Phi \wedge \neg\Psi$ – zastosowanie prawa De Morgana do sprowadzania symbolu negacji bezpośrednio przed formułę atomową,
5. $\neg(\Phi \wedge \Psi) \equiv \neg\Phi \vee \neg\Psi$ – zastosowanie prawa De Morgana do sprowadzania symbolu negacji bezpośrednio przed formułę atomową,
6. $\Phi \vee (\Psi \wedge \Upsilon) \equiv (\Phi \vee \Psi) \wedge (\Phi \vee \Upsilon)$ – zastosowanie prawa rozdzielności alternatywy przy sprowadzaniu do CNF,
7. $\Phi \wedge (\Psi \vee \Upsilon) \equiv (\Phi \wedge \Psi) \vee (\Phi \wedge \Upsilon)$ – zastosowanie prawa rozdzielności koniunkcji przy sprowadzaniu do DNF.

Przykład:

$$\begin{aligned}
 (p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q &\equiv \neg(p \wedge (p \Rightarrow q)) \vee q \equiv \\
 \neg(p \wedge (\neg p \vee q)) \vee q &\equiv (\neg p \vee \neg(\neg p \vee q)) \vee q \equiv \\
 (\neg p \vee (p \wedge \neg q)) \vee q &\equiv \neg p \vee (p \wedge \neg q) \vee q \equiv \\
 (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q) \vee q &\equiv \neg p \vee \neg q \vee q \equiv \neg p \vee \top \equiv \top.
 \end{aligned}$$

Przykład

Rozważmy ponownie przykład:

$$\phi = (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s),$$

$$\varphi = (p \vee r) \Rightarrow (q \vee s).$$

Należy sprawdzić czy za chodzi logiczna implikacja:

$$\phi \models \varphi.$$

Sprowadźmy ϕ do DNF:

$$\begin{aligned} \phi &= (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) = (\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee s) = \\ &= (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge s) \vee (q \wedge \neg r) \vee (q \wedge s). \end{aligned}$$

a następnie do postaci maksymalnej:

$$\begin{aligned} \max DNF(\phi) &= (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee \\ &(\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee \\ &(p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge s). \end{aligned}$$

Sprowadźmy także φ do DNF:

$$\begin{aligned} \varphi &= (p \vee r) \Rightarrow (q \vee s) = \neg(p \vee r) \vee q \vee s = (\neg p \wedge \neg r) \vee q \vee s = \\ &= (\neg p \wedge \neg r) \vee q \vee s. \end{aligned}$$

a następnie do postaci maksymalnej:

$$\begin{aligned} \max DNF(\varphi) &= (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee \\ &(\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee \\ &(\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee \\ &(p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee \\ &(p \wedge \neg q \wedge r \wedge s). \end{aligned}$$

Teraz widać, że:

$$[\max DNF(\phi)] \subseteq [\max DNF(\varphi)],$$

NNF

Definicja 23 *Formuła Ψ jest w postaci normalnej NNF (ang. Negation Normal Form) wtw. gdy wszystkie symbole negacji występują bezpośrednio przed symbolami formuła atomicznych (zmiennych zdaniowych).*

Każda formuła w CNF jest w postaci NNF.

Każda formuła w DNF jest w postaci CNF.

Logiczna konsekwencja — podstawowe problemy logiki

Definicja 24 Logiczna konsekwencja *Formuła ψ jest logiczną konsekwencją formuły ϕ wtw. gdy dla każdej interpretacji I zachodzi*

$$\text{jeżeli } \models_I \phi \text{ to } \models_I \psi. \quad (5)$$

Podstawowe problemy logiki:

- dowodzenie twierdzeń — badanie logicznej konsekwencji:

$$\Delta \models H,$$

- badanie spełnialności (SAT):

Czy istnieje interpretacja $I: \models_I \Psi$

- weryfikacja tautologii:

Czy dla każdej interpretacji $I: \models_I \Psi$

Dwa alternatywne podejścia:

- analiza możliwych interpretacji — metoda zero-jedynkowa; problem — eksplozja kombinatoryczna¹,
- wnioskowanie logiczne — wywód — za pomocą reguł logicznych zachowujących logiczną konsekwencję.

Notacja: jeżeli formuła H jest wywodliwa (wyprowadzalna) ze zbioru Δ , to zapiszemu to jako:

$$\Delta \vdash H$$

Problemy konstrukcji systemów logicznych:

$$\Delta \vdash H \quad \text{versus} \quad \Delta \models H$$

¹Redukcja: drzewa decyzyjne, grafy OBDD, tablice semantyczne

Podstawowe definicje i własności — rekapitulacja

Definicja 25 *Formuła jest nazywana:*

- tautologią wtw. *gdy jest prawdziwa przy każdej interpretacji;*
- formułą falsyfikowalną *gdy nie jest tautologią,*
- formułą spełnialną wtw. *gdy istnieje taka interpretacja, przy której formuła ta jest prawdziwa;*
- formułą niespełnialną, formułą niespójną *lub* formułą sprzeczną wtw. *gdy przy każdej interpretacji formuła ta jest fałszywa;*
- formuła Ψ jest logiczną konsekwencją formuły Φ , co notujemy $\Phi \models \Psi$ wtw. *gdy dla każdej interpretacji przy której Φ jest prawdziwa również Ψ jest prawdziwa;*
- formuła Ψ jest wyprowadzalna z formuły Φ , co notujemy $\Phi \vdash \Psi$ wtw. *gdy istnieje ciąg reguł dowodzenia pozwalający uzyskać Ψ z Φ .*

Konsekwencje tych definicji:

- formuła jest tautologią wtw. *gdy jej negacja jest niespełnialna (spreczna),*
- formuła jest niespełnialna wtw. *gdy jej negacja jest tautologią,*
- formuła nie jest tautologią wtw. *dla przynajmniej jednej interpretacji jest fałszywa,*
- formuła jest niespreczna wtw. *gdy dla przynajmniej jednej interpretacji jest prawdziwa,*
- tautologia jest zawsze formułą spełnialną (ale nie odwrotnie),

- formuła niespełnialna jest formułą falsyfikowalną (ale nie odwrotnie).

Ważniejsze reguły wnioskowania

- $\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}$ — reguła wprowadzania alternatywy,
- $\frac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta}$ — reguła wprowadzania koniunkcji,
- $\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$ — reguła usuwania koniunkcji,
- $\frac{\alpha, \alpha \Rightarrow \beta}{\beta}$ — modus ponens (modus ponendo ponens),
- $\frac{\alpha \Rightarrow \beta, \neg \beta}{\neg \alpha}$ — modus tollens (modus tollendo tollens),
- $\frac{\alpha \vee \beta, \neg \alpha}{\beta}$ — modus tollendo ponens,
- $\frac{\alpha \oplus \beta, \alpha}{\neg \beta}$ — modus ponendo tollens,
- $\frac{\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \gamma}{\alpha \Rightarrow \gamma}$ — reguła przechodniości,
- $\frac{\alpha \vee \gamma, \neg \gamma \vee \beta}{\alpha \vee \beta}$ — reguła rezolucji,
- $\frac{\alpha \wedge \gamma, \neg \gamma \wedge \beta}{\alpha \wedge \beta}$ — reguła dualna do rezolucji; (backward) dual resolution (works backwards), także *consolution*
- $\frac{\alpha \Rightarrow \beta, \gamma \Rightarrow \delta}{(\alpha \vee \gamma) \Rightarrow (\beta \vee \delta)}$ — prawo dylematu konstruktywnego,
- $\frac{\alpha \Rightarrow \beta, \gamma \Rightarrow \delta}{(\alpha \wedge \gamma) \Rightarrow (\beta \wedge \delta)}$ — prawo dylematu konstruktywnego.

Twierdzenia o dedukcji

Twierdzenie 1 Jeżeli $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ są formułami logicznymi (nazywanymi aksjomatami), formuła Ω (nazywana hipotezą lub konkluzją) jest ich logiczną konsekwencją wtw. gdy formuła $\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \dots \wedge \Delta_n \Rightarrow \Omega$ jest tautologią.

Twierdzenie 2 Jeżeli $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ są formułami logicznymi (nazywanymi aksjomatami), formuła Ω (nazywana hipotezą lub konkluzją) jest ich logiczną konsekwencją wtw. gdy formuła $\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \dots \wedge \Delta_n \wedge \neg\Omega$ jest sprzeczna.

Problem dowodzenia twierdzeń ma postać: mając dane aksjomaty $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ uznane za prawdziwe wykazać prawdziwość hipotezy Ω . Tak więc należy wykazać, że:

$$\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \dots \wedge \Delta_n \models \Omega$$

Metody dododzenia twierdzeń:

- sprawdzanie wszystkich możliwych interpretacji (wada: duża złożoność obliczeniowa),
- **dowód wprost** – korzystając z aksjomatów i reguł dowodzenia generujemy nowe formuły aż do uzyskania formuły Ω ,
- **dowodzenie tautologii** – korzystając z Tw.1 dowodzimy, że formuła $\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \dots \wedge \Delta_n \Rightarrow \Omega$ jest tautologią,
- **dowód nie wprost** – to dowód twierdzenia przeciwnego, równoważnego danemu. Polega na dowodzeniu twierdzenia postaci $\neg\Omega \Rightarrow \neg(\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \dots \wedge \Delta_n)$.
- dowód przez **srowadzenie do sprzeczności**; korzystają z Tw.2, polega na wykazaniu sprzeczności formuły:

$$\Delta_1 \wedge \Delta_2 \wedge \dots \wedge \Delta_n \wedge \neg\Omega.$$

Przykład: badanie logicznej konsekwencji

$$\frac{(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)}{(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)}$$

Kładąc:

$$\phi = (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$$

oraz

$$\varphi = (p \vee r) \Rightarrow (q \vee s),$$

należy sprawdzić czy:

$$\phi \models \varphi. \tag{6}$$

p	q	r	s	$p \Rightarrow q$	$r \Rightarrow s$	$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$	$p \vee r$	$q \vee s$	$(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)$
0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Z analizy kolumn 7 i 10 wynika, że zachodzi **relacja logicznej konsekwencji** (brak logicznej równoważności — 7, 10, 12 i 15).

Metoda rezolucji

1. Problem:

$$\Delta \models H$$

2. Z twierdzenia o dedukcji (2) — należy wykazać, że

$$\Delta \cup \neg H$$

jest niespełnialny.

3. Dokonać transformacji $\Delta \cup \neg H$ do postaci CNF.

4. Wykorzystując **regułę rezolucji** wyprowadzić zdanie puste - zawsze fałszywe.

Przykład:

1. Problem:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \models (p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)$$

2. Z twierdzenia o dedukcji (2) — należy wykazać, że

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \cup \neg[(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)]$$

jest niespełnialny.

3. Dokonać transformacji do postaci CNF. Mamy:

$$\{\neg p \vee q, \neg r \vee s, p \vee r, \neg q, \neg s\}$$

4. Wykorzystując **regułę rezolucji** wyprowadzić zdanie puste - zawsze fałszywe.

Metoda rezolucji dualnej

1. Problem:

$$\Delta \models H$$

2. Z twierdzenia o dedukcji (1) — należy wykazać, że

$$\Delta \Rightarrow H$$

jest tautologią.

3. Dokonać transformacji $\Delta \Rightarrow H$ do postaci DNF.

4. Wykorzystując [regułę rezolucji dualnej](#) wyprowadzić zdanie puste - zawsze prawdziwe.

Przykład:

1. Problem:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \models (p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)$$

2. Z twierdzenia o dedukcji (1) — należy wykazać, że

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)]$$

jest tautologią.

3. Dokonać transformacji do postaci DNF. Mamy:

$$\{p \wedge \neg q, r \wedge \neg s, \neg p \wedge \neg r, q, s\}$$

4. Wykorzystując [regułę rezolucji dualnej](#) wyprowadzić zdanie puste - zawsze prawdziwe.

Przykład aksjomatyzacji i wyvodu

A – pojawił się sygnał do procesu,

P – sygnał został dodany do zbioru sygnałów oczekujących na odebranie przez proces,

B – sygnał jest zablokowany przez proces,

D – sygnał został dostarczony do procesu (i odebrany),

S – stan procesu jest zachowany,

M – maska sygnałów jest obliczana,

H - procedura obsługi sygnałów jest wywołana,

N – procedura obsługi jest wywołana w zwykły sposób,

R – proces wznowia wykonanie w poprzednim kontekście,

I – proces musi sam odtworzyć poprzedni kontekst.

Dane są reguły:

$$A \longrightarrow P,$$

$$P \wedge \neg B \longrightarrow D,$$

$$D \longrightarrow S \wedge M \wedge H,$$

$$H \wedge N \longrightarrow R,$$

$$H \wedge \neg R \longrightarrow I,$$

Konkluzje:

$$P, D, S, M, H, I, \neg N.$$

Dane są fakty:

$$A, \neg B, \neg R$$

Zastosowanie rezolucji — CNF:

$$\{\neg A \vee P, \neg P \vee B \vee D, \neg D \vee S, \neg D \vee M, \neg D \vee H, \neg H \vee \neg N \vee R, \neg H \vee R \vee I, A, \neg B, \neg R\}$$

Krok wnioskowania, wywód

Krok wnioskowania: jednokrotne zastosowanie dowolnej reguły wnioskowania w celu produkcji konkluzji.

Przykład:

Zastosowanie reguły rezolucji:

$$\frac{\phi \vee \neg p, p \vee \psi}{\phi \vee \psi}$$

Piszemy: $\{\phi \vee \neg p, p \vee \psi\} \vdash_R \phi \vee \psi$

Definicja 26 Wywód Wywodem formuły ϕ ze zbioru formuł Δ nazywamy ciąg formuł

$$\phi_1, \phi_2 \dots \phi_k$$

taki, że:

- formuła ϕ_1 jest wyprowadzalna z Δ (w pojedynczym kroku wnioskowania):

$$\Delta \vdash \phi_1,$$

- każda następna formuła jest wyprowadzalna ze zbioru Δ i uprzednio wygenerowanych formuł (w pojedynczym kroku wnioskowania):

$$\{\Delta, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_i\} \vdash \phi_{i+1}$$

dla $i = 2, 3, \dots, k - 1$,

- ϕ jest ostatnią formułą wygenerowanego ciągu, tzn.:

$$\phi = \phi_k$$

Piszemy: $\Delta \vdash \phi$, a formułę ϕ nazywamy **wywodliwą** z Δ .

Zbiór logicznych konsekwencji

Definicja 27 Niech Δ będzie zbiorem formuł (koniunkcją). Zbiorem logicznych konsekwencji nazywamy zbiór

$$Cn(\Delta) = \{\phi : \Delta \models \phi\}$$

gdzie każda formuła ϕ jest zbudowana jedynie w oparciu o symbole propozycjonalne Δ .

Lemat 7 Własności zbioru konsekwencji Zbiór logicznych konsekwencji $Cn(\Delta)$ ma następujące własności:

- $\Delta \subseteq Cn(\Delta)$,
- *monotoniczność* — jeżeli $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$, to:

$$Cn(\Delta_1) \subseteq Cn(\Delta_2)$$

- $Cn(Cn(\Delta)) = Cn(\Delta)$ (*punkt stały*).