

---

# Logika

---

## Logika

Materiały pomocnicze do wykładu dla Studentów

Informatyki Stosowanej

Wydział EAIiB AGH

**Antoni Ligęza**

Materiały pomocnicze:

<http://home.agh.edu.pl/~ligeza>

---

## Zasady pracy i współpracy

---

1. **Cel:** zdobywanie wiedzy i umiejętności — z obszaru *logiki*.
2. Obowiązuje Regulamin Studiów w AGH<sup>1</sup>, ale także *logika* i *zdrowy rozsądek*.
3. Przykładowe zasady szczegółowe GEIST: <http://geist.agh.edu.pl/pub:teaching:gris>
4. Formy zajęć i *zdobywania wiedzy*:
  - wykład,
  - ćwiczenia,
  - *e-learning*,
  - *samodzielne studiowanie*,
  - dyskusja,
  - konsultacje.
5. Obecność i aktywność na ćwiczeniach jest obowiązkowa.
6. Obecność i *uwaga* (ang. *mindfulness*) na wykładzie jest *usilnie pożądana*.
7. Entuzjazm, dodatkowa aktywność wsparta zdolnościami i pracą są mile widziane.
8. *Usilnie proszę* o prowadzenie notatek.
9. Obowiązuje *pełne zrozumienie materiału*.
10. W każdej chwili wolno pytać — prawie o wszystko.

---

<sup>1</sup>[http://www.agh.edu.pl/files/common/dokumenty/regulamin-studiow/regulamin\\_studiow\\_2012.pdf](http://www.agh.edu.pl/files/common/dokumenty/regulamin-studiow/regulamin_studiow_2012.pdf)

11. Kolokwia, prace i egzaminy — obowiązuje **absolutnie samodzielna praca**.
12. **Zasady zaliczeń, egzaminów, oceny końcowej — do ustalenia — w ramach regulaminu.**

---

## Plan pracy — Sylabus

---

### **Wiedza:**

**M\_W001** Zna i rozumie podstawowe pojęcia i koncepcje logiki.

**M\_W002** Zna i rozumie składnię i semantykę podstawowych formalizmów logicznych.

**M\_W003** Zna i rozumie reguły i metody wnioskowania.

**M\_W004** Zna i rozumie zasady konstrukcji modeli logicznych oraz ich analizy.

### **Umiejętności:**

**M\_U001** Potrafi operować aparatem pojęciowym logiki.

**M\_U002** Potrafi posługiwać się językiem logiki w zakresie składni i semantyki podstawowych formalizmów logicznych.

**M\_U003** Potrafi stosować reguły i metody wnioskowania.

**M\_U004** Potrafi wykonać formalizację logiczną prostych problemów i dokonać jej analizy.

### **Kompetencje społeczne:**

**M\_K001** Ma świadomość roli i znaczenia logiki w informatyce i technice, przedsiębiorstwie, gospodarce i społeczeństwie.

---

## Plan pracy — Sylabus

---

Wprowadzenie do logiki, istota logiki, rola i zadania logiki, obszary zastosowań.

Rola i znaczenie języka.

Składnia, semantyka, interpretacja, model.

Własności logiczne.

Wywód. Pojęcie logicznej konsekwencji.

Przykłady formalizacji problemów.

Język rachunku zdań. Składnia i semantyka. Reguły przekształcania formuł. Postacie CNF, DNF, NNF. Reguły wnioskowania. Dowodzenie twierdzeń.

Drzewa decyzyjne i diagramy OBDD.

Logika rachunku predykatów. Składnia i semantyka. Reguły przekształcania formuł. Postacie CNF, DNF, NNF. Reguły wnioskowania. Dowodzenie twierdzeń.

Logiki atrybutowe. Składnia i semantyka. Reguły przekształcania formuł. Postacie CNF, DNF, NNF. Reguły wnioskowania. Dowodzenie twierdzeń.

Tablice i drzewa decyzyjne.

Podstawy automatycznego dowodzenia twierdzeń. Reguła rezolucji. Reguła dualna. Podstawienia i unifikacja. Sprowadzanie do postaci normalnej. Strategie dowodzenia.

Wstęp do programowania logicznego. Idea języka Prolog.

Wybrane problemy i ograniczenia logiki klasycznej.

Wybrane zastosowania i narzędzia logiki.

Informacja o innych logikach.

---

## Literatura

---

1. Mordechai Ben-Ari: *Mathematical Logic for Computer Science* (Logika matematyczna w informatyce). Springer-Verlag, London, 2001 (WN-T, Warszawa, 2005).
2. Kenneth A. Ross i Charles R. B. Wright: *Discrete Mathematics* (Matematyka dyskretna). WN PWN, 2013.
3. Antoni Ligęza: *Logical Foundations for Rule-Based Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Wydawnictwo AGH, Kraków, 2005.
4. Michael R. Genesereth, Nils J. Nilsson: *Logical Foundations of Artificial Intelligence*. Morgan Kaufmann Publishers, Inc., Los Altos, California, 1987.
5. Zbigniew Huzar: *Elementy logiki dla informatyków*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 2007.
6. Stuart Russell, Peter Norvig: *Artificial Intelligence. A Modern Approach*. Pearson, 2010.
7. Marek Wójcik: *Zasada rezolucji. Metoda automatycznego wnioskowania*. PWN, Warszawa, 1991.
8. C. L. Chang and R. C. T. Lee: *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*. Academic Press, 1973.
9. Ronald J. Brachman and Hector J. Levesque: *Knowledge Representation and Reasoning*. Morgan Kaufmann, 2004.
10. Frank van Harmelen, Vladimir Lifschitz, Bruce Porter (Eds.): *Handbook of Knowledge Representation*. Elsevier B.V., Amsterdam, 2008.  
<http://ii.fmph.uniba.sk/~sefranek/kri/handbook/>

---

## Zasoby sieciowe. Kurs w Stanford

---

Kurs logiki on-line Stanford:

<https://www.coursera.org/course/intrologic>

1. **Wikipedia-pl:** [http://pl.wikipedia.org/wiki/Logika\\_matematyczna](http://pl.wikipedia.org/wiki/Logika_matematyczna)
2. **Wikipedia-en:** <http://en.wikipedia.org/wiki/Logic>
3. **AI-Lab-Prolog:** [http://ai.ia.agh.edu.pl/wiki/pl:prolog:prolog\\_lab](http://ai.ia.agh.edu.pl/wiki/pl:prolog:prolog_lab)
4. **EIS-KRR:** <http://ai.ia.agh.edu.pl/wiki/pl:dydaktyka:krr:start>
5. **ALI-home:** [home.agh.edu.pl/~ligeza](http://home.agh.edu.pl/~ligeza)
6. **David Poole and Allen Mackworth: Artificial Intelligence. Foundations of Computational Agents.** <http://artint.info/>
7. **Ulf Nilsson and Jan Maluszynski: Logic, Programming and Prolog.** <http://www.ida.liu.se/~ulfni/lpp/>

---

## Przykłady... wieloznaczność języka naturalnego

---

Żona do męża informatyka

- Kup parówki, jak będą jajka to kup 10.

Mąż w sklepie

- Są jajka?

- Są

- To poproszę 10 parówek



---

## Przykłady... wnioskowanie — ale czy logiczne?

---

Ojciec:

- Ktoś ukradł nam krowę!

Starszy syn:

- Jak ukradł to znaczy konus jakiś.

Średni syn:

- Jak konus to pewnie z Trojanowa.

Najmłodszy syn:

- Jak z Trojanowa to pewnie Wasyl.

Zapręgli konia do wozu i pojechali do Trojanowa.

I dali Wasylowi po mordzie.

Wasyl jednak nie przyznał się do kradzieży.

Profilaktycznie dali mu po mordzie drugi raz, ale także bez efektu.

Chcąc nie chcąc, wsadzili Wasyla na wóz i pojechali do sądu grodzkiego.

Stanęli przed sędzią i ojciec mówi:

- Obudziłem się rano, patrzę krowę ktoś ukradł. Mówię o tym synom. Najstar

Sędzia:

- Hmm... logika niby żelazna, ale to jeszcze niczego nie dowodzi. No, na

Ojciec:

- Pudełko kwadratowe.

Najstarszy syn:

- To znaczy, że w nim coś okrągłego.

Średni syn:

- Jak okrągłe to musi być pomarańczowe.

Najmłodszy:

- Jak pomarańczowe to z pewnością mandarynka.

Sędzia zdumiony zagląda do pudełka i mówi:

- No, Wasyl.... Krowę trzeba jednak oddać.

---

## Logika — podejście systemowe

---

### Modelowanie systemów:

- wejścia:
  - sterowanie (możemy kontrolować),
  - parametry (nie możemy zmieniać);
- wyjścia:
  - obserwowalne (mieralne),
  - nieobserwowalne;
- stan — pamięć wewnętrzna
- transformacja:
  - wejścia  $\times$  stan  $\longrightarrow$  stan,
  - wejścia  $\times$  stan  $\longrightarrow$  wyjścia,
- ograniczenia,
- zakłócenia,
- cel,
- kryteria jakości,
- sterownik/regulator — realizacja celu,
- sprzężenie zwrotne i jego rola.

---

## Logika — podejście systemowe — racjonalność

---

- *Czy nie mógłby pan mnie poinformować, którądy powinnam pójść? – mówiła dalej.*
- *To zależy w dużej mierze od tego, dokąd pragnęłabyś zajść – odparł Kot-Dziwak.*
- *Właściwie wszystko mi jedno.*
- *W takim razie również wszystko jedno, którądy pójdziesz.*
- *Chciałabym tylko dostać się dokądś – dodała Alicja w formie wyjaśnienia.*
- *Ach, na pewno tam się dostaniesz, jeśli tylko będziesz szła dość długo.*

Przykład: **Uczelniany system zapewnienia jakości kształcenia.**

Pytania:

- Logika a **racjonalizm**?
- Logika a **prawda**?
- Logika a **prawo**?
- Logika a **mądrość**?
- Logika a **wiedza**?
- Logika a **inteligencja**?
- Logika a **wnioskowanie przez człowieka**?

Logika jest podstawowym narzędziem reprezentacji i przetwarzania wiedzy (w tym w *Sztucznej Inteligencji*).

## Logika — narzędzie reprezentacji i przetwarzania wiedzy

---

### Obserwacje:

Nie wszystkie procesy dają się modelować numerycznie.

Język naturalny:

- bywa nieadekwatny,
- jest nieprecyzyjny; niepełne opisy,
- jest wieloznaczny,
- jest trudny do automatycznego przetwarzania,
- łatwo budować *teorie* niespójne,
- jest nadmiarowy,
- wymaga *ontologii*.

Język formalny — wymagania:

- adekwatny,
- precyzyjny,
- jednoznacznie interpretowany,
- automatyczne przetwarzanie,
- zapewnienie spójności ([consistency](#)),
- poprawność konkluzji ([validity](#); [soundness](#)),
- zapewnienie pełności ([completeness](#)),
- nienadmiarowość (brak redundancji).

---

## Po co komu logika

---

- logika pozwala definiować pojęcia (małżeństwo, szybki tramwaj, średnioroczny wzrost cen, jakość wykształcenia, jakość kształcenia, jakość procesu kształcenia,...),
- logika porządkuje dyskusję; dyskusja *na argumenty*,
- logika dostarcza formalnych metod reprezentacji wiedzy,
- logika dostarcza poprawnych metod wnioskowania — dedukcja,
- logika umożliwia wnioskowanie indukcyjne i abdukcyjne,
- wiedza wyspecyfikowana logicznie może być analizowana:
  - wewnętrzna niesprzeczność (spójność),
  - zupełność,
  - minimalna reprezentacja,
  - wynikanie logiczne — logiczna konsekwencja,
  - spełnialność lub niespełnialność.
- aparat logiki jest uniwersalny (ma zastosowanie w wielu dziedzinach, od filozofii i matematyki, poprzez nauki techniczne, do prawa, medycyny i biologii a nawet ekonomii, socjologii i psychologii).

Gdzie nie stosuje się logiki? Co nie podlega prawom logiki?

## Logika — problemy

### Język naturalny:

#### Paradoks kłamcy:

- *Ja zawsze kłamię* (Eubulides),
- *Kreteńczycy zawsze kłamią* (Epimenides; sam był Kreteńczykiem),
- Kartka: Str.1 *Zdanie na odwrotnej stronie jest prawdziwe*; str.2 *Zdanie na odwrotnej stronie jest fałszywe*.
- **Mukator** — Co to jest mukator? To jest coś, co *nie daje się zdefiniować*.

### Język formalny:

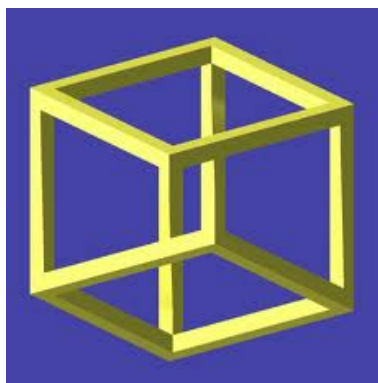
#### Matematyka:

- Paradoks zbioru wszystkich zbiorów (Cantor, 1899),
- Paradoks Russela (1901): rozważmy zbiór  $V = \{X : X \notin X\}$ . Czy  $V \in V$ ?
- Paradoks fryzjera: *Pewien fryzjer goli wszystkich mieszkańców miasta, którzy sami się nie golą; co ma zrobić sam ze sobą?*

**Przykłady bardziej znanych paradoksów:** <http://pl.wikipedia.org/wiki/Paradoks>

## Coś nie tak...

---



---

## Logika — jak to działa

---

### Logika — język formalny:

- alfabet,
- składnia (ang. *syntax*),
- semantyka (ang. *semantics*),
- aksjomatyzacja

$$\models p \vee \neg p$$

$$\not\models p \wedge \neg p$$

- reguły transformacji (wyrażenia równoważne),
- reguły wnioskowania (logiczna konsekwencja),
- wywód (wyprowadzenie).
- hipoteza,
- dowód.

### Modelowanie systemów:

- wybór języka (obiekty, własności, relacje, zależności, ograniczenia, wynikanie, ....),
- budowa modelu,
- badanie własności — analiza, weryfikacja,
- dowodzenie twierdzeń — wnioskowanie,
- strojenie modelu.



---

## Przykład — układ EX-OR

---

```
% Definicje działania bramek podstawowych
not(1,0).
not(0,1).

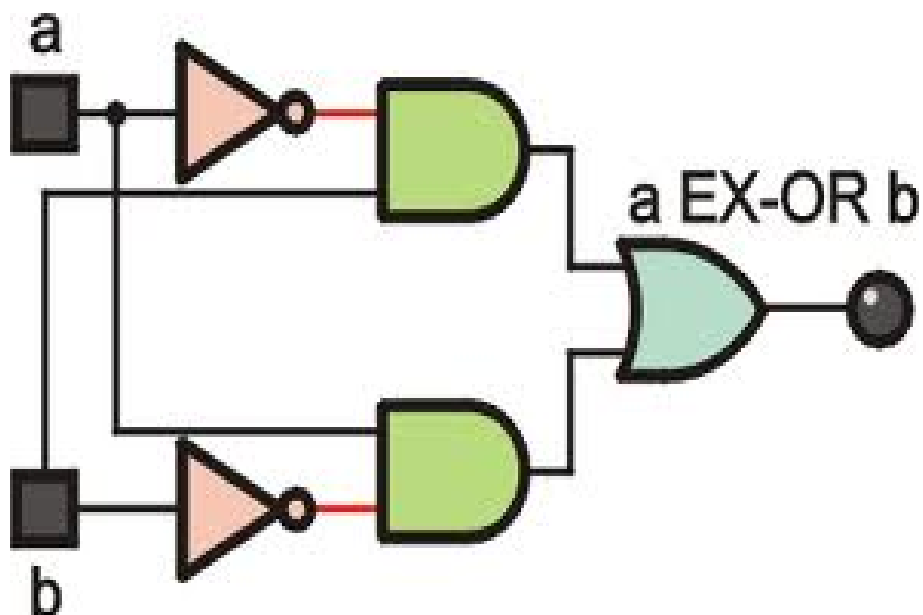
and(0,0,0).
and(0,1,0).
and(1,0,0).
and(1,1,1).

or(0,0,0).
or(0,1,1).
or(1,0,1).
or(1,1,1).

% Definicja przykładowego układu - xor

xor(Input1,Input2,Output) :-
not(Input1,N1),
not(Input2,N2),
and(Input1,N2,N3),
and(Input2,N1,N4),
or(N3,N4,Output).
```

## Przykład — układ EX-OR



Rysunek 1: EX-OR digital circuit

## KRR — logika — co i jak?

---

- dowodzenie twierdzeń, weryfikacja logicznej konsekwencji:

$$\Delta \models H;$$

- prowadzenie rozumowań — wywód:

$$\Delta \vdash H;$$

- badanie spełnialności (SAT); poszukiwanie modelu:

$$\models_I H;$$

- badanie niespełnialności:

$$\not\models_I H;$$

- badanie zupełności – weryfikacja tautologii:

$$\models H$$

- badanie poprawności reguł wnioskowania:

$$(\Delta \vdash H) \longrightarrow (\Delta \models H)$$

- badanie zupełności reguł wnioskowania:

$$(\Delta \models H) \longrightarrow (\Delta \vdash H)$$

---

## Zadania:

---

- oryginalny przykład wnioskowania (wywód),
- oryginalny przykład niespójności,
- oryginalny przykład spełnialności (ograniczenia).
- Ochotnicy: system i jego model logiczny.

## Przykład: prosta wersja logiki rachunku zdań

---

### Alfabet:

- $P$  — zbiór symboli propozycjonalnych,
- spójniki logiczne:  $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ ,
- nawiasy.

### Składnia:

- każde  $p \in P$  jest formułą (atomiczną),
- jeżeli  $\phi, \psi$  są formułami, to:
  - $\neg(\phi)$  jest formułą (także  $\neg(\psi)$ ),
  - $\phi \wedge \psi$  jest formułą,
  - $\phi \vee \psi$  jest formułą,
  - $\phi \Rightarrow \psi$  jest formułą;
  - *nic innego nie jest formułą.*

Każda poprawnie skonstruowana formuła posiada jednoznacznie określone [drzewo struktury](#).

### Semantyka:

Interpretacja — dowolna funkcja  $I$  postaci:

$$I: P \rightarrow \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$$

Pojęcie interpretacji [rozszerzamy](#) na zbiór formuł (jak???)

Notacja:  $I(\phi) = \mathbf{T}$  zapisujemy  $\models_I \phi$ ;  $I(\phi) = \mathbf{F}$  zapisujemy  $\not\models_I \phi$

Dla każdej formuły logicznej można zbudować [tablicę prawdy](#).

---

## Reguły dowodzenia

---

Przykładowe reguły dowodzenia (wywodu):

**Reguła odrywania:**

$$\frac{\phi, \phi \Rightarrow \psi}{\psi}$$

**Reguła potwierdzania przez zaprzeczenie (wykluczenie):**

$$\frac{\neg\phi, \phi \vee \psi}{\psi}$$

**Reguła przechodności:**

$$\frac{\phi \Rightarrow \varphi, \varphi \Rightarrow \psi}{\phi \Rightarrow \psi}$$

**Reguła rezolucji:**

$$\frac{\phi \vee \neg p, p \vee \psi}{\phi \vee \psi}$$

**Reguła rezolucji dualnej:**

$$\frac{\phi \wedge \neg p, p \wedge \psi}{\phi \wedge \psi}$$

---

## Przykład aksjomatyzacji i wyvodu

---

**A** – pojawił się sygnał do procesu,

**P** – sygnał został dodany do zbioru sygnałów oczekujących na odebranie przez proces,

**B** – sygnał jest zablokowany przez proces,

**D** – sygnał został dostarczony do procesu (i odebrany),

**S** – stan procesu jest zachowany,

**M** – maska sygnałów jest obliczana,

**H** - procedura obsługi sygnałów jest wywołana,

**N** – procedura obsługi jest wywołana w zwykły sposób,

**R** – proces wznowia wykonanie w poprzednim kontekście,

**I** – proces musi sam odtworzyć poprzedni kontekst.

Dane są reguły:

$$A \longrightarrow P,$$

$$P \wedge \neg B \longrightarrow D,$$

$$D \longrightarrow S \wedge M \wedge H,$$

$$H \wedge N \longrightarrow R,$$

$$H \wedge \neg R \longrightarrow I,$$

Dane są fakty:

$$A, \neg B, \neg R.$$

---

## Konkluzje

---

$P, D, S, M, H, I, \neg N.$



---

## Przykład praktyczny

---

```
% Definicje działania bramek podstawowych
not(1,0).
not(0,1).

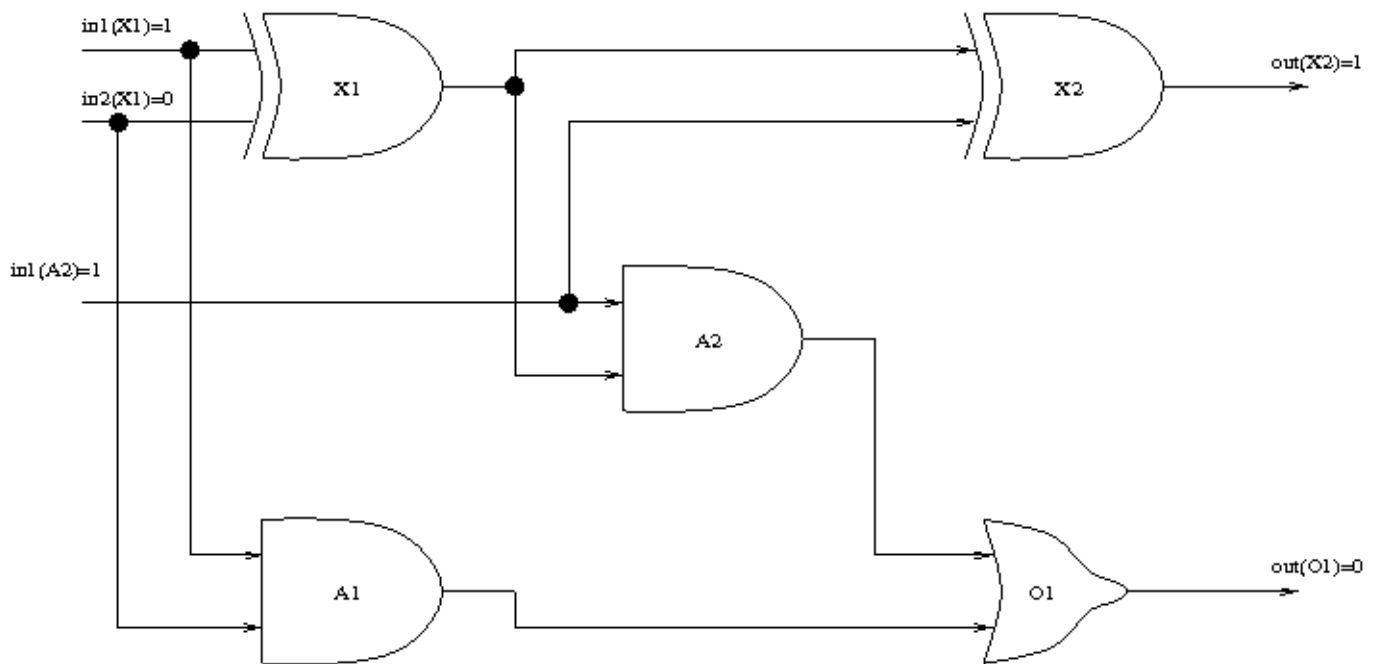
and(0,0,0).
and(0,1,0).
and(1,0,0).
and(1,1,1).

or(0,0,0).
or(0,1,1).
or(1,0,1).
or(1,1,1).

% Definicja przykładowego układu - xor
xor(Input1,Input2,Output) :-
    not(Input1,N1),
    not(Input2,N2),
    and(Input1,N2,N3),
    and(Input2,N1,N4),
    or(N3,N4,Output).
```

## Przykład praktyczny

```
foo (I1, I2, I3, O1, O2) :-  
    xor (I1, I2, X1) ,  
    xor (X1, I3, O1) ,  
    and (I1, I2, A1) ,  
    and (X1, I3, A2) ,  
    or (A1, A2, O2) .
```



## Własności formuł

---

Formuła  $\phi$  jest:

**prawdziwa/spełniona** — dla danej interpretacji  $I$ ,  $\models_I \phi$ ,

**nieprawdziwa/niespełniona** — dla danej interpretacji  $I$ ,  $\not\models_I \phi$ ,

**spełnialna** — istnieje interpretacja  $I$ ,  $\models_I \phi$ ,

**niespełnialna/fałszywa** — nie istnieje interpretacja  $I$ ,  $\models_I \phi$ ,

**tautologią** — dla każdej interpretacji  $I$ ,  $\models_I \phi$ ; piszemy

$$\models \phi$$

**formułą zawsze fałszywą** — dla każdej interpretacji  $I$  interpretacji  $I$ ; piszemy

$$\not\models \phi$$

Zależności pomiędzy własnościami formuły

$$\psi$$

oraz jej negacją

$$\neg\psi$$

Proszę spróbować **odkryć**.

## KRR — logika — co i jak?

---

- dowodzenie twierdzeń, weryfikacja logicznej konsekwencji:

$$\Delta \models H;$$

- prowadzenie rozumowań — wywód:

$$\Delta \vdash H;$$

- badanie spełnialności (SAT); poszukiwanie modelu:

$$\models_I H;$$

- badanie niespełnialności:

$$\not\models_I H;$$

- badanie zupełności – weryfikacja tautologii:

$$\models H$$

- badanie poprawności reguł wnioskowania:

$$(\Delta \vdash H) \longrightarrow (\Delta \models H)$$

- badanie zupełności reguł wnioskowania:

$$(\Delta \models H) \longrightarrow (\Delta \vdash H)$$

## Ograniczenia logiki rachunku zdań

---

Język logiki rachunku zdań ma niską siłę ekspresji. Przykład:

*Sokrates jest człowiekiem.*

*Każdy człowiek jest śmiertelny.*

---

*Sokrates jest śmiertelny.*

man(plato) .

man(socrates) .

mortal(X) :- man(X) .

---

ojciec(jacek,wojtek) .

ojciec(jacek,barbara) .

ojciec(jan,ewa) .

ojciec(jan,tomek) .

ojciec(jan,jacek) .

m(tomek) .

m(jacek) .

m(wojtek) .

k(ewa) .

brat(B,X) :-

ojciec(P,X) ,

ojciec(P,B) ,

m(B) ,

B \= X .

## Błędy systemów logicznych i ich wykrywanie

---

- niespójność,
- niekompletność,
- nieadekwatność,
- indeterminizm,
- nadmiarowość.

P. Łukasz Urbanek:

*Zgodnie z prośbą przesyłam przykład na niespójność w regulaminie AGHa. Przedziały 60-61%, 70-71%, 80-81%, 90-91% nie mają przypisanej do siebie oceny.*

### § 13 SKALA OCEN

1. W Uczelni stosuje się następującą skalę ocen:
  - 1) 91 – 100%      bardzo dobry (5.0);
  - 2) 81 – 90%      plus dobry (4.5);
  - 3) 71 – 80%      dobry (4.0);
  - 4) 61 – 70%      plus dostateczny (3.5);
  - 5) 50 – 60%      dostateczny (3.0);
  - 6) poniżej 50%    niedostateczny (2.0).
2. W wyjątkowych sytuacjach kiedy brak jest podstaw do ustalenia oceny, prowadzący przedmiot może zaliczyć go pozytywnie używając zapisu „zaliczono (zal.)”.
3. Z przedmiotu wystawiane są oceny z zaliczeń zajęć obowiązkowych i z egzaminu, jeżeli przewiduje go plan studiów, z zastrzeżeniem ust. 4.
4. Przy zaliczeniach zajęć z wychowania fizycznego, ze względu na specyfikę tego przedmiotu, stosuje się wyłącznie zapisy:
  - 1) zaliczono – dla studentów, którzy uzyskali minimum wymagane do zaliczenia zajęć z wychowania fizycznego,
  - 2) niezaliczono – dla studentów, którzy nie uzyskali minimum wymaganego do zaliczenia zajęć z wychowania fizycznego,
  - 3) zaświadczenie lekarskie.
5. Zapis słowny „zal.” nie ma żadnego odpowiednika w ocenie liczbowej i nie może być uwzględniany przy obliczeniu średniej oceny za okres rozliczeniowy.